2. ŠETNJE, PUTEVI, POVEZANOST GRAFA

Definicija:

Šetnja u grafu G je konačan neprazan niz $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ u kome se naizmjenično smjenjuju čvorovi i grane, pri čemu su v_{i-1} i v_i krajnji čvorovi grane e_i. v_0 je početni, a v_k završni čvor šetnje W. Čvorovi $v_1, \dots v_{k-1}$ su unutrašnji čvorovi šetnje W.
Šetnja koja počinje u čvoru v_0 a završava u čvoru v_k je $(v_0 - v_k)$ šetnja.

U šetnji se čvorovi i grane mogu ponavljati.

Definicija:

Dužina šetnje je broj njenih grana. Staza je šetnja u kojoj se grane ne ponavljaju. Put je staza u kojoj su čvorovi različiti.

Rastojanje između čvorova u i v je dužina najkraćeg (u, v)-puta. Ako se početni i završni čvor šetnje, staze ili puta poklapaju, imamo zatvorenu šetnju, zatvorenu stazu ili zatvoreni put (konturu). Kontura dužine k je k-kontura. Označavamo je sa C_k

Definicija:

Čvorovi u i v su povezani u grafu G ako u G postoji (u, v)-put. Graf G je povezan ako su svaka dva njegova čvora povezana.

Definicija:

(1) Graf H je podgraf grafa G, u oznaci $H \subseteq G$ ako je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$.
(2) H je razapinjući podgraf grafa G ako je $V(H) = V(G)$

Definicija:

Komponenta povezanosti grafa G je maksimalan povezani podgraf grafa G. Odnosno, H je komponenta povezanosti grafa G ako je H povezan podgraf i ne postoji povezani podgraf $H' \subseteq G$ takav da je $H \subsetneq H'$.

Broj komponenti povezanosti grafa G označavamo sa $\omega(G)$

Neka je G jednostavan graf. Komplement grafa G, u oznaci G^C ili $\overline{G}$, je graf sa istim skupom čvorova, tako da su dva čvora u i v susjedi u G^C akko u i v nisu susjedi u G.

Teorema

Bar jedan od grafova G ili G^C je povezan.

Dokaz.

Pretpostavimo da G nije povezan i dokažimo da je tada povezan graf G^C

$\vdots$

$\square$

- $G - e \subseteq G$, $e \in E(G)$
- $G - a \subseteq G$, $a \in V(G)$

Definicija:

Grana $e \in E(G)$ *je most u grafu* G *ako se njenim udaljavanjem iz* G *povećava broj komponenti povezanosti, t.j. ako važi*

$$\omega(G - e) > \omega(G).$$

Teorema

Grana $e \in E(G)$ *je most u grafu* G *akko* e *ne leži ni na jednoj konturi u* G

Dokaz.

$\vdots$

$\square$

Definicija:

Čvor $a \in V(G)$ *je artikulacioni čvor grafa* G *ako se njegovim udaljavanjem iz* G *povećava broj komponenti povezanosti, t.j. ako važi*

$$\omega(G - a) > \omega(G).$$

Teorema

Čvor $a \in V(G)$ *je artikulacioni čvor grafa* G *akko u grafu* G *postoje čvorovi* u *i* v *takvi da svaki* (u, v)*-put u* G *prolazi čvorom* a

Dokaz.

$\vdots$

$\square$

Definicija:

Graf G je bipartitan ako se njegov skup čvorova može razbiti na dva bloka tako da ma koja dva čvora istog bloka nisu susjedi. G je kompletan bipartitan graf ako su svaka dva njegova čvora koja pripadaju različitim blokovima susjedi

- $K_{m,n}$
- $K_{3,3}$ - kompletan bitrigraf

Teorema

Graf G je bipartitan akko u G nema neparnih kontura

Dokaz.

$\vdots$

$\square$

- Matrica susjedstva grafa (multigrafa) G - $A_{nxn}(G)$
- Matrica incidencije grafa (multigrafa)G - $M_{nxm}(G)$

Teorema

Neka je G graf (multigraf) sa skupom čvorova $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i $A(G)$ njegova matrica susjedstva. Za svaki prirodan broj k, element $a_{ij}^{(k)}$ koji se nalazi na presjeku i-te vrste i j-te kolone matrice $A^k(G)$ jednak je broju različitih $(v_i - v_j)$-šetnji dužine k u neorjentisanom grafu (multigrafu) G

Dokaz.

Dokaz - matematičkom indukcijom po $k \in N$:
$\underline{k = 1}$: Tačno na osnovu definicije matrice susjedstav grafa, odnosno multigrafa
$\underline{k \Rightarrow k + 1}$: Pretpostavimo da je tvrđenje tačni za $k \geq 1$.
Na osnovu definicije proizvoda matrica važi:

$$A^{k+1} = A^k A$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(k)} a_{sj} \qquad (1)$$

Neka je W familija svih $(v_i - v_j)$-šetnji dužine $k+1$ u grafu G. Tada je

$$W = \biguplus_{s=1}^{n} W_s,$$

gdje je $W_s \subseteq W$ familija $(v_i - v_j)$-šetnji dužine $k+1$ u kojim je v_s predposlednji čvor.
Otuda je $|W_s|$ jednak proizvodu broja $(v_i - v_s)$-šetnji dužine k i broja a_{sj}, t.j. na osnovu induktivne pretpostavke,

$$|W_s| = a_{is}^{(k)} \cdot a_{sj}$$

Iz principa zbira,

$$|W| = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(k)} a_{sj}$$

Sada tvrđenje slijedi iz jednakosti (1).